

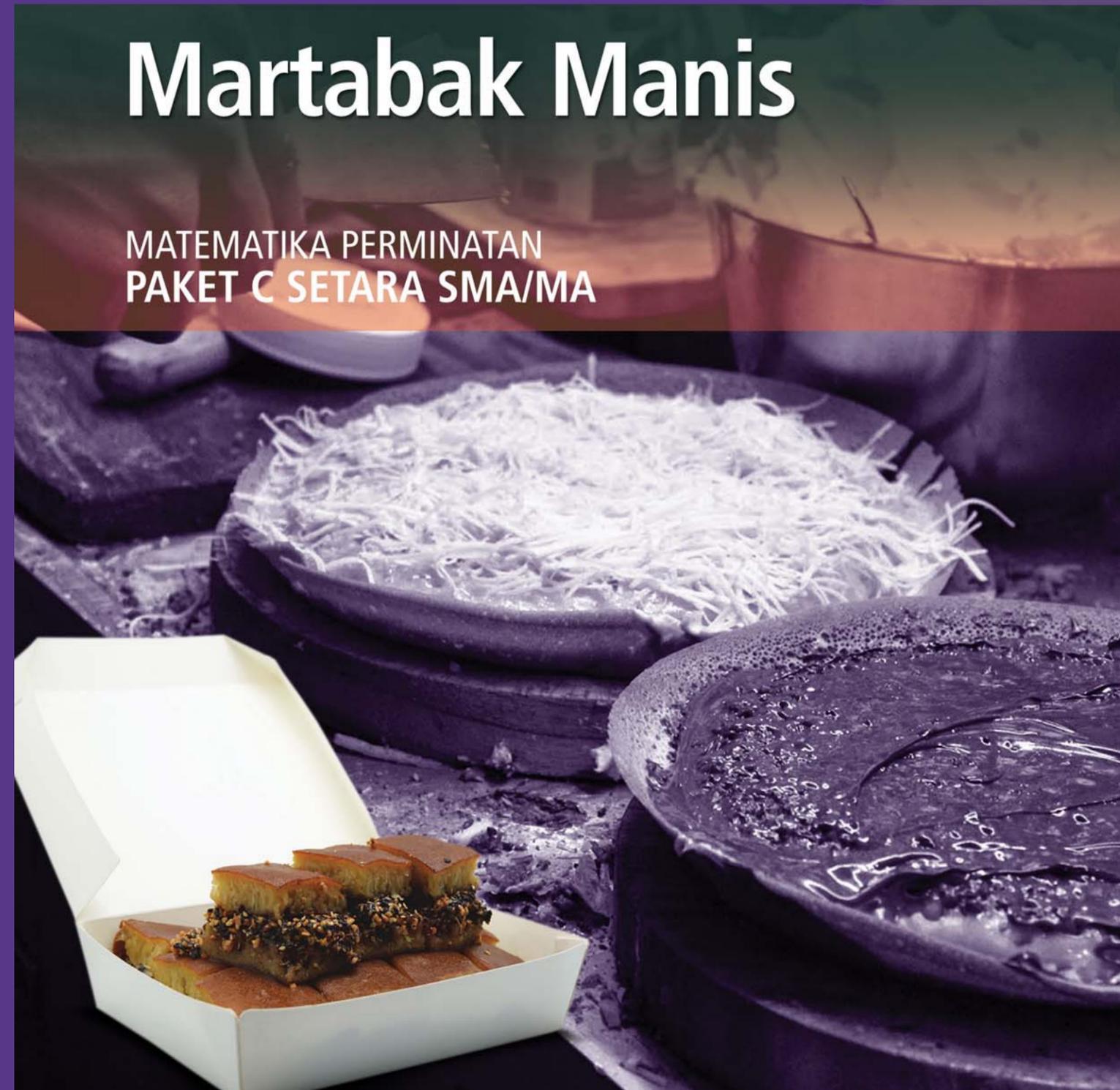


Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 4

Martabak Manis

MATEMATIKA PERMINATAN
PAKET C SETARA SMA/MA



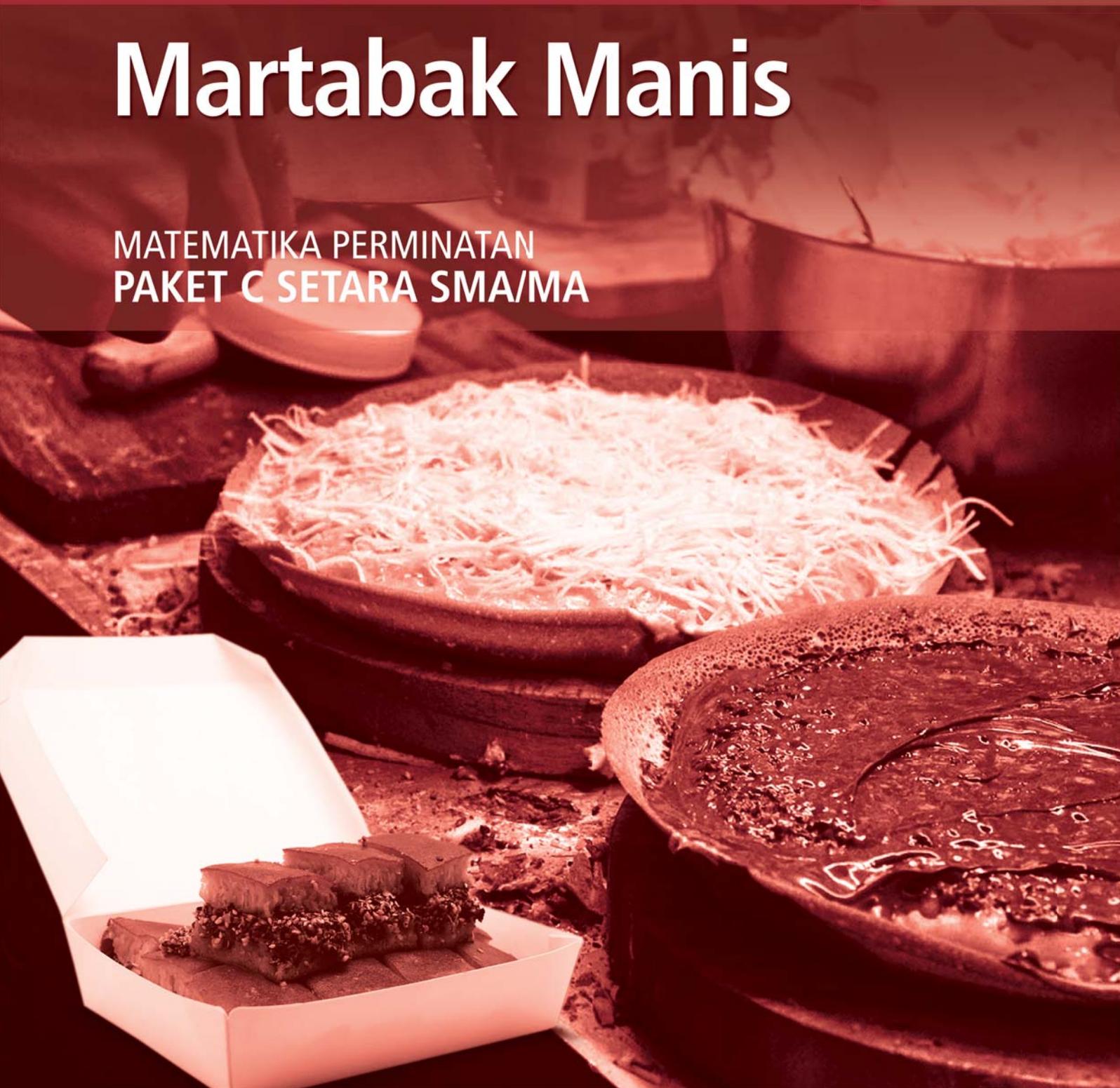


Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 4

Martabak Manis

MATEMATIKA PERMINATAN
PAKET C SETARA SMA/MA



Matematika Peminatan Paket C Tingkatan V Modul Tema 4
Modul Tema 4 : Martabak Manis

- Penulis: Sujatmiko
- Diterbitkan oleh: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-
Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan
Kebudayaan, 2018

iv+ 40 hlm + ilustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada masyarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2017
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Daftar Isi

Kata Pengantar	ii
Daftar Isi	iii
Petunjuk Penggunaan Modul	1
Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi	2
Tujuan yang Diharapkan Setelah Mempelajari Modul	3
Pengantar Modul	3
UNIT 1 POTONGAN MARTABAK MANIS	5
A. Pengertian Lingkaran	6
Penugasan	9
Latihan	10
UNIT 2 UKURAN MARTABAK MANIS	13
A. Persamaan Lingkaran Berpusat di $O(0,0)$ dan (a,b)	13
B. Persamaan Lingkaran Berpusat di Titik $A(a,b)$ dan Jari-jari r	14
C. Menentukan Pusat dan Jari-jari yang Samaannya Diketahui	16
Penugasan	19
Latihan	20
UNIT 3 KEMASAN MARTABAK MANIS	22
A. Persamaan Garis Singgung Melalui Suatu Titik pada Lingkaran	22
B. Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien Tertentu	24
C. Persamaan Garis Singgung Lingkaran Melalui Titik (x,y) di Luar Lingkaran	26
Penugasan	29
Latihan	30
Rangkuman	33
Uji Kompetensi	34
Kunci Jawaban	36
Kriteria Pindah Modul	38
Saran Referensi	39
Daftar Pustaka	40

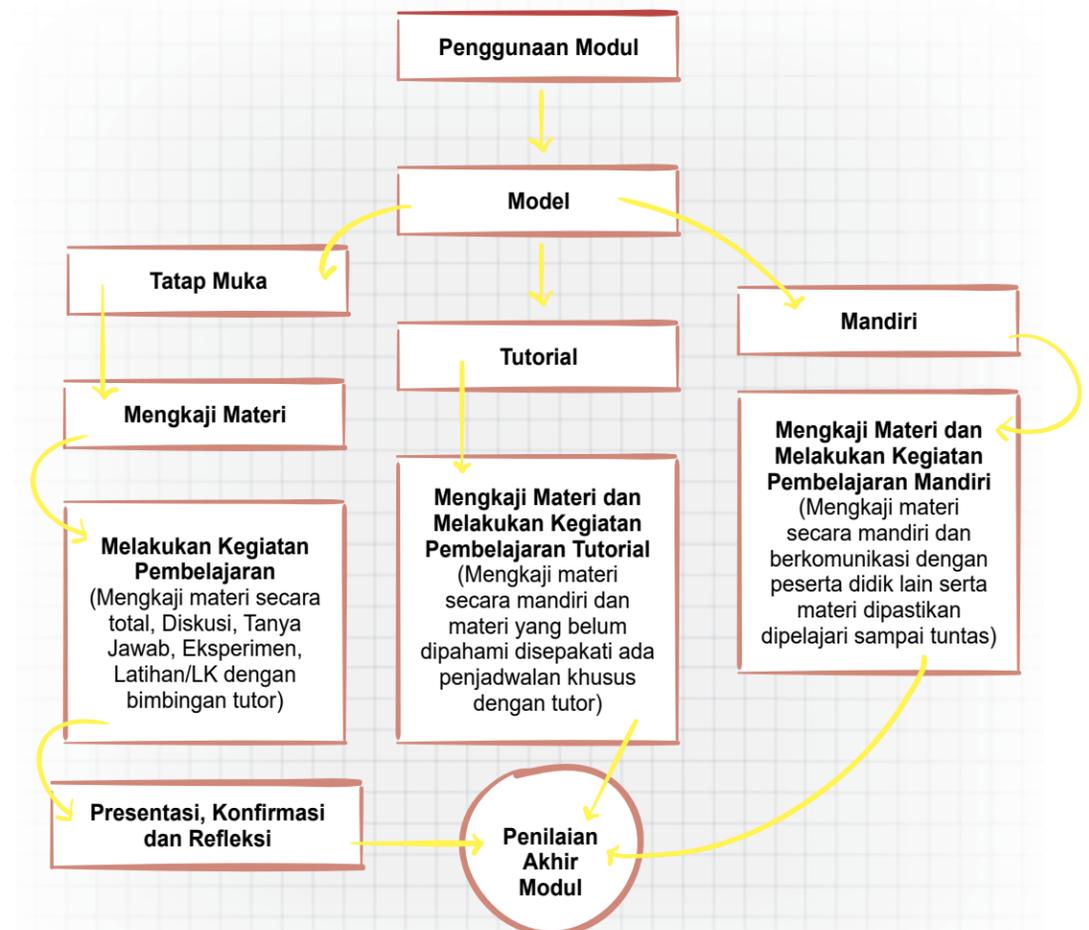


MARTABAK MANIS



Petunjuk Penggunaan Modul

Secara umum, petunjuk penggunaan modul pada setiap kegiatan pembelajaran disesuaikan dengan langkah-langkah kegiatan pada setiap penyajian modul. Modul ini dapat digunakan dalam kegiatan pembelajaran oleh peserta didik, baik dilaksanakan dengan model tatap muka, model tutorial, maupun model belajar mandiri. Berikut ini alur petunjuk penggunaan modul secara umum dapat dilihat pada bagian di bawah ini.



Gambar 1.1 Alur Model Kegiatan Pembelajaran

1. Kegiatan Pembelajaran Tatap Muka

Pembelajaran tatap muka merupakan seperangkat tindakan yang dirancang untuk mendukung proses belajar peserta didik secara tatap muka, sedangkan kegiatan tatap muka adalah kegiatan pembelajaran yang di dalamnya terjadi proses interaksi antara peserta didik dan pendidik/tutor. Metode yang sering digunakan dalam kegiatan pembelajaran seperti metode diskusi, Tanya jawab, demonstrasi, eksperimen dan lainnya.

2. Kegiatan Pembelajaran Tutorial

Pembelajaran tutorial yang dimaksud dalam kegiatan ini adalah dimana pembelajaran dilakukan secara mandiri untuk materi-materi yang dapat dengan mudah dipahami oleh peserta didik, sedangkan materi-materi yang dianggap sulit untuk dipahami atau dipelajari maka dilakukan dengan tatap muka. Dalam pembelajaran metode tutorial ini diberikan dengan bantuan tutor. Setelah peserta didik diberikan bahan kajian materi pembelajaran, kemudian peserta didik diminta untuk mempelajari kajian materi yang ada dalam modul. Pada bagian kajian materi yang dirasa sulit, peserta didik dapat bertanya pada tutor.

3. Kegiatan Pembelajaran Mandiri

Kegiatan pembelajaran mandiri merupakan kegiatan pembelajaran yang didorong agar peserta didik mampu menguasai suatu kompetensi guna menyelesaikan suatu permasalahan. Pada kegiatan pembelajaran mandiri peserta didik diberikan kajian materi yang ada dalam modul untuk dipelajari dan diarahkan untuk memegang kendali dalam menemukan dan mengorganisir jawaban yang diharapkan. Penetapan kompetensi sebagai tujuan pembelajaran mandiri dan sampai pada cara pencapaian mulai dari penentuan waktu belajar, tempat belajar, sumber belajar lainnya maupun evaluasi modul dilakukan oleh peserta didik itu sendiri. Pada pembelajaran mandiri dipastikan dengan benar bahwa peserta didik melakukan kajian materi, melakukan tahapan kegiatan pembelajaran, tahapan penugasan/latihan, evaluasi, bahkan sampai pada tahap penilaian dilakukan oleh peserta didik itu sendiri.

Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi

Tabel 1.1 Tabel Kompetensi Dasar dan Pencapaian Kompetensi

No	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1	3.5 Menganalisis unsur-unsur bangun datar lingkaran dengan alat peraga(benda di sekitar) atau tanpa alat peraga	3.5.1 Merumuskan persamaan lingkaran berpusat di (0,0) dan (a,b). 3.5.2 Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui.

No	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
		3.5.3 Menentukan persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu. 3.5.4 Merumuskan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik pada lingkaran. 3.5.5 Merumuskan persamaan garis singgung yang gradiennya diketahui
	4.5 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan lingkaran dengan mengidentifikasi dan memahami karakteristik masalahnya	4.5.1 Mengidentifikasi masalah kontekstual yang berhubungan dengan lingkaran. 4.5.2 Menyusun rancangan model matematika dari masalah kontekstual yang berhubungan dengan lingkaran. 4.5.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan lingkaran dengan langkah-langkah penyelesaian.

Tujuan yang Diharapkan Setelah Mempelajari Modul

Tujuan setelah mempelajari modul 4 ini, diharapkan peserta didik memiliki kemampuan pengetahuan, dan ketrampilan tentang :

1. Merumuskan dan menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (0,0) dan berjari-jari r serta persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu.
2. Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui.
3. Merumuskan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik pada lingkaran dan diketahui gradiennya.
4. Mengidentifikasi, menyusun rancangan dan menyelesaikan masalah kontekstual yang berhubungan dengan lingkaran dengan prosedur dan langkah-langkah penyelesaian.

Pengantar Modul

Pembelajaran merupakan wahana untuk mendapatkan kemampuan baik sikap, pengetahuan dan ketrampilan. Untuk mendukung terciptanya kegiatan pembelajaran baik melalui model

tatap muka, tutorial maupun mandiri, maka salah satu alternatifnya adalah dengan modul ini. Materi pada modul 4 ini adalah lingkaran yang meliputi tiga materi yaitu unsur-unsur lingkaran, persamaan lingkaran dan persamaan garis singgung lingkaran. Materi lingkaran disajikan melalui tema “Martabak Manis” dan di dalamnya terdapat beberapa subtema yang terintegrasi dalam kegiatan pembelajaran. Secara umum materi pembelajaran dalam modul ini membahas yang berkaitan dengan pemahaman unsur-unsur lingkaran, persamaan lingkaran, persamaan garis singgung pada lingkaran serta penyelesaian masalah sehari-hari yang terkait dengan lingkaran. Modul ini memberikan gambaran uraian materi dengan penerapan dalam kehidupan sehari-hari atau bersifat kontekstual.

Modul 4 dengan tema “**Martabak Manis**” ini terbagi menjadi tiga subtema yang terintegrasi ke dalam unit, yaitu unit 1 dengan subtema “**Potongan Martabak Manis**”, unit 2 dengan subtema “**Ukuran Martabak Manis**” dan unit 3 dengan subtema “**Kemasan Martabak Manis**”. Masing-masing unit memuat tentang uraian materi, penugasan dan soal-soal latihan.

Modul ini dilengkapi dengan contoh-contoh yang terjadi di kehidupan sehari-hari, misalnya yang berkaitan dengan lingkaran adalah suatu makanan yang bernama martabak manis. Dari martabak manis yang berbentuk lingkaran dapat dijadikan media untuk mempelajari unsur-unsur lingkaran. Ukuran martabak manis yang bervariasi, ada ukuran kecil, sedang dan besar dapat dijadikan media untuk mempelajari persamaan lingkaran. Persamaan garis singgung lingkaran dapat digunakan dalam pengemasan martabak manis.

Dengan mempelajari modul ini, dimana materi dikaitkan dengan masalah kehidupan sehari-hari, maka diharapkan peserta didik dengan mengkaji, mencermati, mengolah, menjawab permasalahan atau soal-soal latihan dapat memberikan manfaat dalam kehidupan sehari-hari.

Materi disajikan dengan tema dan sub tema yang diintegrasikan dengan permasalahan kehidupan sehari-hari dimaksudkan agar peserta didik lebih tertarik dan memahami bahwa mempelajari vektor sangat penting dan bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mempelajari modul ini, sudah barang tentu memberikan gambaran betapa pentingnya belajar, karena dengan belajar, peserta didik mampu menghadapi dan menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam dunia nyata, sehingga jelas bahwa dengan mempelajari materi lingkaran memberikan manfaat dalam menjalani kehidupan sehari-hari.

UNIT 1

POTONGAN MARTABAK MANIS

Masih ingatkah kalian, saat masih kecil kalian sering bermain ban bekas sepeda, rotan untuk bermain holahop, membuat mainan dengan CD bekas? Benda-benda di sekitar kita yang berbentuk lingkaran yang lain adalah jam dinding, uang koin, roda kendaraan, cincin, gelang, dll. Kalian bisa dengan mudah mengenali dan mencari benda-benda lain yang berbentuk lingkaran tersebut.

Selain benda-benda tersebut, banyak juga jenis makanan yang disajikan dalam bentuk lingkaran, seperti martabak manis. Martabak manis bisa dikenal dengan nama apam pulau pinang/ martabak bangka (Jakarta), terang bulan (Bandung), kue bandung (Semarang), apam pinang (Pontianak), kue bulan (daerah timur Indonesia). Martabak manis adalah panganan sejenis kue dadar yang bisa diujakan di pinggir jalan di seluruh Indonesia. Martabak manis sangat disukai masyarakat Indonesia dari anak-anak sampai orang tua, bukan hanya rasanya yang manis dan lezat, namun juga karena cara membuatnya cukup mudah dan harganya sangat terjangkau.

Dari uraian tersebut, dapat dijelaskan bahwa belajar tidak harus selalu dengan buku, tetapi bisa juga memanfaatkan benda-benda di sekitar kita menjadi media untuk mempermudah memahami sesuatu. Seperti halnya dengan martabak manis, dapat dijadikan media untuk pembelajaran bangun datar lingkaran, seperti unsur-unsur lingkaran, bagaimana menyusun persamaan lingkaran dan penggunaan garis singgung lingkaran dalam membuat kemasannya.

Melalui modul ini diharapkan dapat dijadikan rujukan untuk memahami dan menganalisis tentang unsur-unsur lingkaran, bagaimana merumuskan persamaan lingkaran, menentukan dan merumuskan garis singgung lingkaran serta mampu mengidentifikasi dan menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan lingkaran.

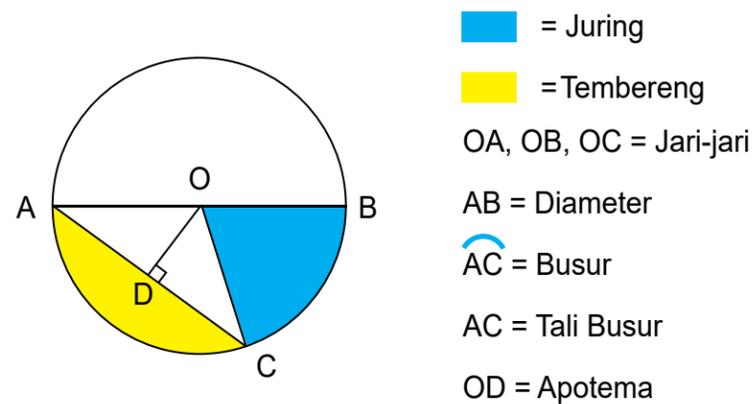


Gambar 1.2. Contoh benda berbentuk lingkaran

Perhatikan saat kalian membeli martabak manis, bagaimana si penjual membuat adonan dan mencetaknya sehingga membentuk lingkaran. Setelah matang, biasanya martabak manis dipotong-potong sesuai selera, ada yang berbentuk persegi, berbentuk juring berbagai ukuran dan lain sebagainya.

Nah, dari martabak manis tersebut, kalian bisa belajar banyak tentang konsep dan unsur-unsur bangun datar lingkaran. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap suatu titik tertentu selalu sama (titik tertentu tersebut disebut titik pusat lingkaran dan jarak yang sama dinamakan jari-jari).

Setiap bangun datar termasuk lingkaran memiliki unsur-unsur yang membangunnya. Beberapa bagian lingkaran yang menjadi unsur-unsur sebuah lingkaran, yaitu titik pusat, jari-jari, busur, diameter, tali busur, juring, tembereng apotema, sudut pusat dan sudut lingkaran. Seperti apa sih unsur-unsur lingkaran?

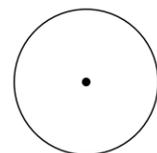


Gambar 1.3. Unsur-unsur lingkaran

Unsur-unsur lingkaran antara lain :

1. Titik pusat

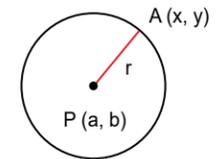
Titik pusat lingkaran adalah titik yang terletak di tengah-tengah lingkaran. Pada gambar diatas titik O merupakan titik pusat lingkaran



Gambar 1.4. Titik pusat lingkaran

2. Jari-jari

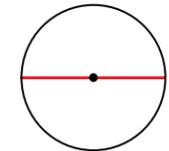
Jari-jari lingkaran adalah garis yang menghubungkan titik pusat ke titik lengkungan/keliling lingkaran. Pada gambar diatas garis OA, OB, OC merupakan jari-jari lingkaran.



Gambar 1.5. Jari-jari lingkaran

3. Diameter

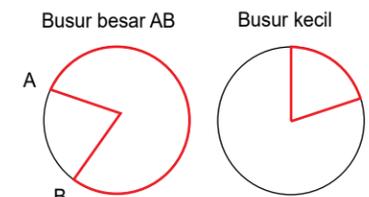
Diameter lingkaran adalah garis lurus yang menghubungkan dua titik pada lengkungan lingkaran dan melalui titik pusat. Pada gambar diatas garis AB merupakan diameter lingkaran.



Gambar 1.6. Diameter lingkaran

4. Busur

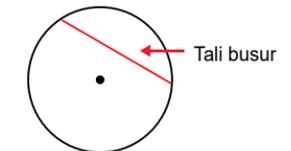
Busur lingkaran adalah garis lengkung yang terletak pada lengkungan/keliling lingkaran dan menghubungkan dua titik sembarang di lengkungan tersebut. Pada gambar diatas garis lengkung AC, garis lengkung AB, dan garis lengkung BC merupakan busur lingkaran.



Gambar 1.7. Busur lingkaran

5. Tali busur

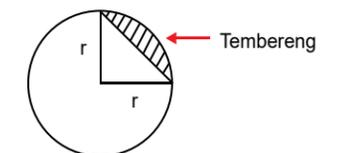
Tali busur lingkaran adalah garis lurus yang menghubungkan dua titik pada lengkungan/keliling lingkaran dan tidak melalui titik pusat lingkaran. Pada gambar diatas garis lurus dari A ke C merupakan tali busur lingkaran.



Gambar 1.8. Tali busur lingkaran

6. Tembereng

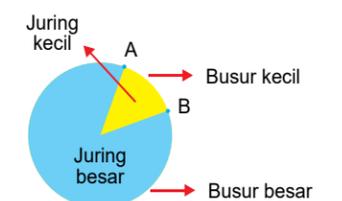
Tembereng adalah luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh busur dan tali busur. Pada gambar diatas tembereng ditunjukkan oleh daerah yang berwarna hijau (daerah yang dibatasi oleh busur AC dan tali busur AC).



Gambar 1.9. Tembereng lingkaran

7. Juring

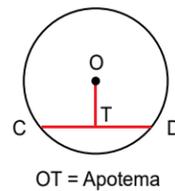
Juring lingkaran adalah luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua buah jari-jari lingkaran dan sebuah busur. Pada gambar diatas juring lingkaran ditunjukkan oleh daerah yang berwarna kuning/daerah BOC (yaitu daerah yang dibatasi oleh jari-jari OB, OC dan busur BC).



Gambar 1.10. Juring lingkaran

8. Apotema

Apotema adalah garis yang menghubungkan titik pusat dengan tali busur lingkaran dan garis tersebut tegak lurus dengan tali busur.



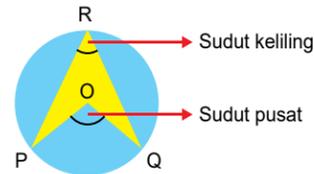
Gambar 1.11. Apotema

9. Sudut pusat

Pada gambar di atas, sudut pusat adalah sudut yang terbentuk oleh dua buah jari-jari (OA dan OB). Sudut yang terbentuk antara titik A, O, dan B merupakan sudut pusat lingkaran.

10. Sudut keliling

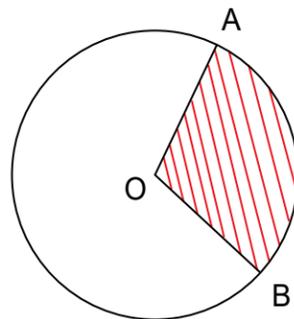
Jika sudut pusat terbentuk oleh bertemunya dua buah jari-jari pada titik pusat, maka sudut keliling adalah sudut yang terbentuk oleh bertemunya dua buah tali busur. Seperti bisa kalian lihat pada gambar di atas, sudut yang terbentuk antara titik A, C, dan B adalah sudut keliling lingkaran dengan titik sudut berada di C.



Gambar 1.12. Sudut pusat, sudut keliling

Contoh soal :

Pada gambar di bawah ini, sudut AOB pada daerah yang diarsir 60 derajat. Jika $\pi = \frac{22}{7}$, jari-jari lingkaran = 21 cm, luas daerah yang diarsir adalah



Jawab :

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$\text{Jari-jari } (r) = 21 \text{ cm}$$

Luas daerah yang diarsir (luas juring AOB):

$$\text{Luas juring AOB} = \frac{\angle AOB}{360} \times \text{luas lingkaran}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{60}{360} \times \pi r^2 \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \\ &= 231 \end{aligned}$$

PENUGASAN

Pada unit 1. "Potongan Martabak Manis", meliputi beberapa kajian materi meliputi :

Tujuan:

Pada pembelajaran ini memiliki tujuan penugasan agar peserta didik dapat membedakan, menganalisa dan menunjukkan unsur-unsur lingkaran.

Media, Alat, Bahan, dan Sumber Belajar Lainnya

Alat dan Bahan yang digunakan: penggaris, alat tulis.

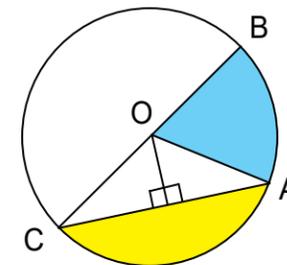
Langkah-langkah Kegiatan

- Kegiatan 1.1. Membedakan dan mengukur luas Unsur-Unsur Lingkaran
Untuk dapat membedakan dan menunjukkan unsur-unsur lingkaran pelajari dan kaji permasalahan berikut ini.

Masalah 1.1

Unsur-unsur Lingkaran

Tentukanlah unsur-unsur lingkaran berikut!



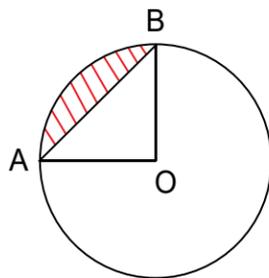
Alternatif jawaban

Untuk dapat membedakan dan menunjukkan unsur-unsur lingkaran, cermatilah gambar dan pengertian unsur-unsur lingkaran dalam uraian

Masalah 1.2

Menentukan luas Unsur-unsur Lingkaran

Martabak manis dengan besar sudut AOB = 90° dan jari-jari 14 cm. Tentukan luas daerah yang diarsir berikut!



Alternatif Jawaban

Diketahui : $\angle AOB = 90^\circ$

Jari-jari (r) = 14 cm

Untuk mencari luas yang diarsir, isilah titik-titik berikut :

$$\begin{aligned} \text{Luas juring AOB} &= \frac{\angle AOB}{360} \times \text{luas lingkaran} \\ &= \frac{\dots\dots\dots}{360} \times \dots\dots\dots \\ &= \frac{\dots\dots\dots}{4} \times \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Apakah jawaban kalian 154 cm²?

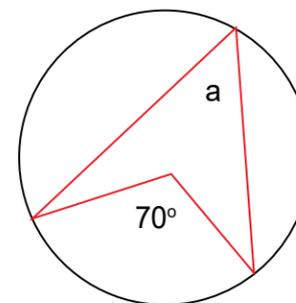
Jika iya, berarti jawaban kalian benar.

LATIHAN

Berilah tanda silang (X) pada salah satu huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar!

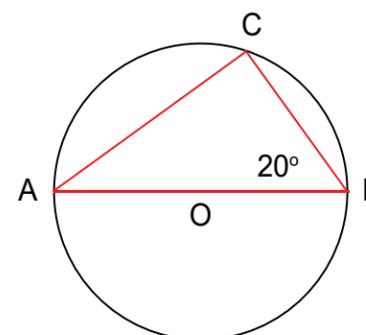
- Daerah yang dibatasi oleh dua buah jari-jari dan sebuah busur pada lingkaran adalah...
 - Tembereng
 - Tali busur
 - Busur
 - Juring

- Besar a = ... derajat



- 35
- 30
- 25
- 20

- Perhatikan gambar di bawah ini!

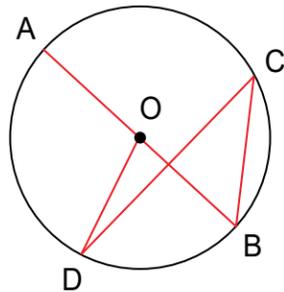


Titik O adalah pusat lingkaran. Besar $\angle BAC = \dots$ derajat

- 90
- 70
- 60
- 20

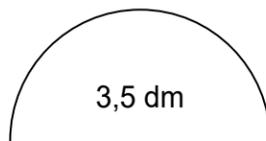
- Sebuah martabak manis berbentuk lingkaran memiliki diameter 105 m. Jika setiap jarak 5,5 m pada pinggir martabak diberikan coklat, berapa banyak coklat yang diperlukan?
 - 60 buah
 - 50 buah
 - 40 buah
 - 33 buah
- Dua martabak manis yang berbentuk lingkaran berjari-jari 11 cm dan 3 cm. Selisih luasnya adalah cm². ($\pi = 22/7$)
 - 352
 - 176
 - 154
 - 77
- Suatu busur panjangnya 44 cm. Jika besar sudut pusat busur 90°, panjang jari-jari lingkaran adalah cm
 - 21
 - 22
 - 24
 - 28

7. Pada gambar di bawah, O adalah pusat lingkaran. Jika besar $\angle BCD = 35$ derajat, besar $\angle AOD$ adalah derajat



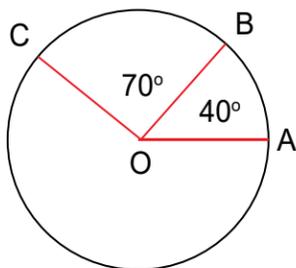
- a. 110
- b. 105
- c. 70
- d. 35

8. Keliling bangun di bawah ini adalah dm



- a. 9
- b. 11
- c. 14,5
- d. 18

9. Perhatikan gambar!



Jika panjang Busur BC = 35 cm, tentukan panjang busur AB

- a. 20
- b. 21
- c. 22
- d. 24

10. Sebuah lingkaran berpusat di titik O memiliki panjang jari-jari 35 cm. Pada lingkaran tersebut terdapat titik A dan B yang membentuk sudut pusat AOB. Jika besar $\angle AOB = 72$ derajat, panjang busur AB adalah

- a. 40 cm
- b. 44 cm
- c. 48 cm
- d. 50 cm

UNIT 2 UKURAN MARTABAK MANIS

Kalian pasti sudah tahu bukan, martabak manis memiliki beberapa ukuran. Ada yang kecil yang biasa disebut martabak manis mini, ukuran sedang dan ukuran besar. Untuk membuat martabak manis yang berbeda ukuran, pasti membutuhkan cetakan yang ukurannya berbeda-beda pula. Tahukah kalian, ukuran martabak manis tersebut tergantung oleh panjang jari-jari cetakan yang berbentuk lingkaran. Martabak manis mini tentu panjang jari-jarinya lebih kecil atau lebih pendek daripada martabak sedang atau martabak besar.

Ukuran jari-jari lingkaran martabak manis bisa kalian gunakan untuk menghitung jumlah bahan membuat martabak manis. Perbandingan Jari-jari martabak manis kecil dengan jari-jari martabak manis besar akan mempermudah kalian dalam menghitung banyaknya bahan atau adonan untuk membuat martabak manis sekaligus menghitung biayanya. Dengan demikian, kalian dapat menghitung juga antara martabak manis mini dan besar jika dijual, manakah yang lebih menguntungkan. Satu adonan martabak manis besar akan dapat dibuat berapa martabak manis ukuran kecil, dengan cara menyusun persamaan lingkarannya. Karena itu, mempelajari bangun datar lingkaran sangat penting baik dalam usaha maupun dalam kehidupan sehari-hari.

Unit sebelumnya, kalian telah mempelajari tentang unsur-unsur lingkaran. Agar penerapan dan fungsi mempelajari bangun datar lingkaran lebih maksimal, pembahasan akan diperluas lagi tentang persamaan lingkaran.



Persamaan Lingkaran Berpusat di O (0,0) dan (a,b)

Jika titik A (x_1, y_1) terletak pada lingkaran yang berpusat di O (0, 0), maka berlaku OA adalah jari-jari lingkaran. Dengan menggunakan rumus jarak titik O (0, 0) dan A (x_1, y_1) diperoleh :

$$OA = r = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2}$$

$$r = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2}$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Persamaan lingkaran dengan pusat O (0, 0) dan berjari-jari r adalah :
 $r^2 = x^2 + y^2$ atau $x^2 + y^2 = r^2$

Contoh soal :

Tentukan persamaan lingkaran yang berbentuk lingkaran jika diketahui :

1. Pusatnya O (0, 0) dan berjari-jari 3 cm
2. Pusatnya O (0, 0) dan melalui titik P(3,4)

Jawab :

1. Persamaan lingkaran pusatnya O (0, 0) dan berjari-jari 3 cm adalah :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

Jadi, persamaan lingkaran pusatnya O (0, 0) dan berjari-jari 3 adalah

$$x^2 + y^2 = 9.$$

2. Persamaan lingkaran yang pusatnya O (0, 0) dan melalui titik P (3, 4) adalah :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Jadi, persamaan lingkaran yang pusatnya O(0,0) dan melalui titik P(3,4) adalah

$$x^2 + y^2 = 25$$

Persamaan Lingkaran Berpusat di Titik A(a,b) dan Berjari-jari r

Jika titik A (a, b) adalah pusat lingkaran dan titik B (x, y) terletak pada lingkaran, maka jari-jari lingkaran r sama dengan jarak dari titik A ke titik B.

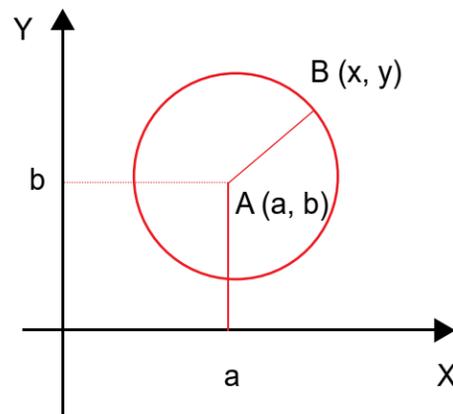
$$r = \text{jarak A ke B} = AB$$

$$r^2 = (AB)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di A (a, b) dan berjari-jari r adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Gambar 2.1.
Lingkaran Berpusat di Titik A (a,b)

Persamaan lingkaran yang berpusat di A(a,b) dan berjari-jari r adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Contoh soal :

Tentukan persamaan lingkaran jika diketahui :

1. Pusatnya (3,-2) dan berjari-jari 6
2. Pusatnya (2,4) dan melalui titik (-3,1)
3. Pusatnya (3,5) dan menyinggung sumbu X

Jawab :

1. Pusatnya (3,-2) dan r = 6

Persamaan lingkarannya :

$$(x - 3)^2 + (y - (-2))^2 = 6^2$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$$

$$x^2 - 3x - 3x + 9 + y^2 + 2y + 2y + 4 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$$

2. Pusatnya (2,4) dan melalui titik (-3,1)

Dicari dulu nilai r dengan rumus $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$r = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (4 - 1)^2}$$

$$r = \sqrt{(5)^2 + (3)^2}$$

$$r = \sqrt{(25 + 9)} = \sqrt{36} = 6$$

Persamaan lingkaran :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 36$$

$$x^2 - 2x - 2x + 4 + y^2 - 4y - 4y + 16 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 16 = 0$$

3. Pusatnya (3,5) dan menyinggung sumbu X, berarti $r = 5$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$$

$$x^2 - 2x - 2x + 4 + y^2 - 4y - 4y + 16 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 20 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 16 = 0$$

Menentukan Pusat dan Jari-jari yang Persamaannya Diketahui

Untuk menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui, dapat dicari dengan rumus berikut : $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

Dengan pusatnya $(-A, -B)$ dan jari-jari lingkaran $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$

Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut.

Contoh soal 1 :

Tentukan koordinat pusat dan jari-jari lingkaran apabila diketahui persamaan lingkaran sebagai berikut!

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

2. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$

Jawab :

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

Perhatikan rumus $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

Diperoleh : $2A = -2$, $2B = -6$ dan $C = -15$

$$A = -1 \quad B = -3$$

Jadi, koordinat pusatnya $(-A, -B) = (1, 3)$

Untuk jari-jari $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 - (-15)}$$

$$r = \sqrt{1 + 9 + 15} = \sqrt{25} = 5$$

Jadi jari-jari lingkaran tersebut adalah 5.

2. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$ (disederhanakan dulu, dibagi 2)

$$x^2 + y^2 - 2x + \frac{3}{2}y = 0$$

Perhatikan rumus $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

Diperoleh : $2A = -2$, $2B = \frac{3}{2}$ dan $C = 0$

$$A = -1 \quad B = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}$$

Untuk jari-jari $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 0}$$

$$r = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

Jadi, koordinat pusat $(-A, -B) = (1, -3/4)$, jari-jari lingkaran = $5/4$.

Contoh soal 2 :

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik (2, 1), (1, 2), dan (1, 0), dan tentukan pula pusat dan jari-jari lingkarannya!

Jawab :

Rumus persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

Melalui titik (2, 1) maka $x = 2$ dan $y = 1$

$$2^2 + 1^2 + 2A \cdot 2 + 2B \cdot 1 + C = 0$$

$$4 + 1 + 4A + 2B + C = 0$$

$$4A + 2B + C + 5 = 0 \dots\dots\dots \text{Persamaan (1)}$$

Melalui titik (1,2) ,aka $x = 1$ dan $y = 2$

$$1^2 + 2^2 + 2A \cdot 1 + 2B \cdot 2 + C = 0$$

$$1 + 4 + 2A + 4B + C = 0$$

$$2A + 4B + C + 5 = 0 \dots\dots\dots \text{Persamaan (2)}$$

Melalui titik (1, 0) maka $x = 1$ dan $y = 0$

$$1^2 + 0^2 + 2A \cdot 1 + 2B \cdot 0 + C = 0$$

$$1 + 0 + 2A + 0 + C = 0$$

$$2A + C + 1 = 0 \dots\dots\dots \text{Persamaan (3)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$4A + 2B + C + 5 = 0$$

$$2A + 4B + C + 5 = 0$$

$$\underline{2A - 2B = 0}$$

$$2A = 2B$$

$$A = B \dots\dots\dots \text{Persamaan (4)}$$

Persamaan (2) dan (4)

$$2A + 4B + C + 5 = 0$$

$$A = B \dots\dots\dots \text{Persamaan (5)}$$

Maka : $2A + 4A + C + 5 = 0$

$$6A + C + 5 = 0 \dots\dots\dots \text{Persamaan (6)}$$

Persamaan (3) dan (5)

$$2A + C + 1 = 0$$

$$6A + C + 5 = 0$$

$$\underline{-4A - 4 = 0}$$

$$-4A = 4$$

$$A = -1$$

Lihat persamaan (5) bahwa $A = B$, jadi $B = -1$

Persamaan (6) : $6A + C + 5 = 0$

$$6(-1) + C = -5$$

$$-6 + C = -5$$

$$C = -5 + 6 = 1$$

Maka diperoleh nilai $A = -1$, $B = -1$ dan $C = 1$

Jari-jari $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 - 1}$$

$$r = \sqrt{1 + 1 - 1} = \sqrt{1} = 1$$

Jadi, persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

PENUGASAN

Pada unit 2. "Ukuran Martabak Manis", meliputi beberapa kajian materi meliputi :

Tujuan

Pada pembelajaran ini memiliki tujuan penugasan agar peserta didik dapat :

- 1) Menyusun persamaan lingkaran yang diketahui jari-jarinya
- 2) Menentukan persamaan lingkaran, menentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran yang diketahui persamaannya

Media, Alat, Bahan, dan Sumber Belajar Lainnya

Alat dan Bahan yang digunakan: benda-benda yang berbentuk lingkaran yang ada di sekitar peserta didik.

Langkah-langkah Kegiatan

- a. Kegiatan 1.1. Menyusun persamaan Lingkaran suatu Benda
Untuk dapat membedakan dan menunjukkan unsur-unsur lingkaran pelajari dan kaji permasalahan berikut ini.

Masalah 1.1.a.

Menyusun Persamaan Lingkaran suatu Benda

Amatilah 3 benda yang berbentuk lingkaran di sekitar kalian, ukurlah jari-jarinya dan kemudian susunlah persamaannya!

Alternatif jawaban

Untuk dapat mengerjakan penugasan tersebut, peserta didik harus :

1. Mencari dan menyebutkan 3 benda yang berbentuk lingkaran.
 2. Mengukur panjang jari-jari masing-masing benda
 3. Menyusun persamaan lingkaran masing-masing benda tersebut.
- b. Kegiatan 1.2. Menentukan persamaan lingkaran, menentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran yang diketahui persamaannya
Untuk dapat menentukan persamaan lingkaran, menentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran yang diketahui persamaannya pelajari dan kaji permasalahan berikut ini!

Masalah 1.2.

Menentukan persamaan lingkaran, menentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran yang diketahui persamaannya

Kerjakan soal berikut dengan baik dan benar!

1. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dari persamaan lingkaran berikut. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
2. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat (3, 4) dan melalui titik (5, 5).
3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (1, 2) dan berjari-jari 5.
4. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik (-2, 0), (6, 0), dan (5, 7) dan tentukan pula pusat dan jari-jari lingkarannya.

Alternatif jawaban

Untuk dapat mengerjakan penugasan tersebut, peserta didik harus :

1. Membaca, mencermati dan memahami uraian materi dan rumus-rumus persamaan lingkaran.
2. Pilih rumus yang tepat untuk menjawab apa yang ditanyakan
3. Mulai mengerjakan sesuai dengan langkah-langkah yang tepat.

LATIHAN

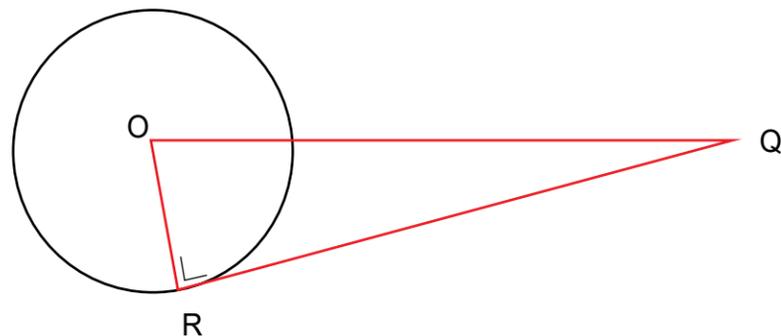
Berilah tanda silang (X) pada salah satu huruf a, b, c, d atau e pada jawaban yang benar!

1. Persamaan lingkaran berpusat di titik (2, 3) dan melalui titik (5, -1) adalah
a. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ b. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 13 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 25 = 0$ d. $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 10 = 0$
e. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 25 = 0$
2. Persamaan lingkaran dengan pusat (3, -2) dan menyinggung sumbu Y adalah
a. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$ b. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ d. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$
e. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$
3. Jarak antara titik pusat lingkaran $x^2 - 4x + y^2 + 4 = 0$ dari sumbu y adalah
a. 3 b. 2,5
c. 2 d. 1,5
e. 1
4. Tentukan pusat lingkaran $x^2 + y^2 + 2px + 6y + 4 = 0$ yang mempunyai jari-jari 3 dan menyinggung sumbu X.
a. (-2, 3) b. (2, -3)
c. (2, 3) d. (3, -2)
e. (-3, 2)
5. Persamaan lingkaran yang mempunyai diameter AB dengan A (-2, 2) dan B (2, -2) adalah
a. $x^2 + y^2 - 2 = 0$ b. $x^2 + y^2 - 4 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 8 = 0$ d. $x^2 + y^2 - 9 = 0$
e. $x^2 + y^2 - 16 = 0$
6. Jika lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ yang berpusat di titik (2, 3) menyinggung garis $y = 1 - x$ maka nilai c sama dengan
a. 0 b. 4
c. 5 d. 9
e. 13
7. Jika A (1, 3), B (7, -5) maka persamaan lingkaran yang mempunyai diameter AB adalah
a. $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ b. $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$
c. $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 8 = 0$ d. $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$
e. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$
8. Jari-jari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 4x + 2y + c = 0$ dan melalui titik (5, -1) adalah
a. $\sqrt{7}$ b. 3
c. 4 d. $2\sqrt{6}$
e. 9
9. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik (7, 1) adalah
a. $3x - 4y - 41 = 0$ b. $4x + 3y - 55 = 0$
c. $4x - 5y - 53 = 0$ d. $4x + 3y - 31 = 0$
e. $4x - 3y - 40 = 0$
10. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 + 2px + 10y + 9 = 0$ mempunyai jari-jari 5 dan menyinggung sumbu x. Pusat lingkaran tersebut adalah
a. (-5, -3) b. (-5, 3)
c. (6, -5) d. (-6, -5)
e. (3, -5)

Pengemasan merupakan kegiatan merancang dan memproduksi wadah atau bungkus sebuah produk. Fungsi utama dari kemasan adalah untuk menjaga produk agar tidak rusak, namun sekarang kemasan menjadi faktor yang cukup penting sebagai alat pemasaran. Demikian juga dengan martabak manis yang berbentuk lingkaran. Bagaimana cara menentukan ukuran dan menghitung bahan yang dibutuhkan untuk membuat kemasan martabak manis yang lebih ekonomis tapi menarik?

Manfaat mempelajari garis singgung lingkaran sangat banyak, salah satu manfaat penting tersebut adalah dalam membuat kemasan martabak manis. Mempelajari persamaan garis singgung lingkaran dan permasalahannya dalam kehidupan sehari-hari perlu kalian ingat kembali tentang pengertian, sifat-sifat dan cara mencari garis singgung lingkaran.

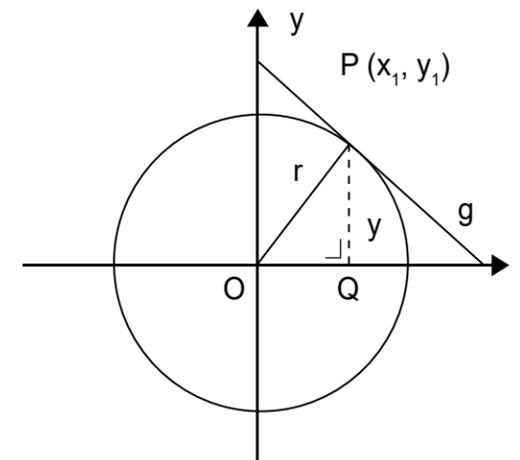
Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran hanya pada satu titik, dan garis singgung lingkaran tersebut tegak lurus dengan jari-jari lingkaran.



Gambar 3.1. Garis singgung lingkaran

Untuk lebih memahami materi tersebut, perhatikan uraian materi berikut.

Titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada garis g dan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, seperti diperlihatkan pada gambar berikut. Garis g dikatakan menyinggung lingkaran jika garis g memotong lingkaran di dua titik yang berhimpit atau garis g tegak lurus dengan jari-jari lingkaran di titik singgungnya.



Gambar 3.2. Garis Singgung Melalui Suatu Titik pada Lingkaran.

Gradien garis yang menghubungkan titik O dan titik P adalah $m_{op} = \frac{y_1}{x_1}$. Garis g menyinggung lingkaran di P , jelas garis $OP \perp g$ sehingga $m_{op} \cdot m_g = -1$.

Sehingga $\frac{y_1}{x_1} \cdot m_g = -1$. Jadi, gradien garis g adalah : $m_g = \frac{x_1}{y_1}$.

Jadi, persamaan garis singgung g adalah :

$$y - y_1 = m_g (x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$$

$$y_1 (y - y_1) = x_1 (x - x_1)$$

$$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

Jadi, persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik $P(x, y)$ adalah $x_1 x + y_1 y = r^2$

Untuk mempermudah kalian mengingat dan menggunakan rumus persamaan garis singgung pada lingkaran dengan titik singgung (x, y) dapat digunakan cara berikut :

1. Persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 = r^2$

Persamaan garis singgung : $x_1 x + y_1 y = r^2$

2. Persamaan lingkaran : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Persamaan garis singgung : $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

Persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Persamaan garis singgung: $x_1 x + y_1 y + \frac{1}{2} A (x_1 + x) + \frac{1}{2} B (y_1 + y) + C = 0$

Contoh soal 1 :

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di titik $(4, -3)$.

Jawab :

Titik $(4, -3)$ maka $x_1 = 4$ dan $y_1 = -3$. Sehingga diperoleh $4^2 + (-3)^2 = 25$.

Persamaan garis singgung : $x_1x + y_1y = r^2 \leftrightarrow 4x - 3y = 25$.

Contoh soal 2 :

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ di titik $(-6, 4)$.

Jawab :

Titik $(-6, 4)$ maka $x = -6$ dan $y = 4$.

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ menjadi $(-6 + 2)^2 + (4 - 1)^2 = 25$.

Diketahui $a = -2$ dan $b = 1$ maka persamaan garis singgung :

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

$$(x_1 + 2)(x + 2) + (y_1 - 1)(y - 1) = 25$$

Untuk $x_1 = -6$ dan $y_1 = 4$ diperoleh :

$$(-6 + 2)(x + 2) + (4 - 1)(y - 1) = 25$$

$$-4(x + 2) + 3(y - 1) = 25$$

$$-4x - 8 + 3y - 3 = 25$$

$$-4x + 3y = 14$$

Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien Tertentu

Misalkan m_h adalah gradien garis h : $m_h x + m_h$ dan m adalah gradien garis singgung g , maka :

- 1) Jika garis singgung g sejajar garis h , berlaku $m = m_h$
- 2) Jika garis singgung g tegak lurus garis h , berlaku $m \cdot m_h = -1$ atau $m = (-1)/m_h$

Persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dirumuskan sebagai berikut :

$$y = mx \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

Persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dirumuskan sebagai berikut :

$$y - b = m(x - a) \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

Contoh soal 1 :

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang tegak lurus garis $x + 2y + 4 = 0$.

Jawab :

$x + 2y + 4 = 0$ maka diperoleh $m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$

Misal garis singgungnya adalah g , maka $m_g \cdot m_1 = -1$ (syarat tegak lurus)

$$m_g \cdot (-\frac{1}{2}) = -1 \text{ maka } m_g = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ diperoleh $r = \sqrt{36} = 6$

Jadi persamaan garis singgung g adalah : $y = mx \pm r \sqrt{m^2 + 1}$

$$y = 2x \pm 6 \sqrt{2^2 + 1}$$

$$y = 2x \pm 6 \sqrt{5}$$

Contoh Soal 2 :

Carilah persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dengan gradien $m = -1$.

Jawab :

Persamaan garis untuk gradien $m = -1$ adalah $y = (-1)x + n$ atau $y = -x + n$. Substitusi persamaan garis ini ke persamaan lingkaran, diperoleh :

$$x^2 + (-x + n)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 2nx + n^2 = 4$$

$$2x^2 - 2nx + (n^2 - 4) = 0$$

Nilai diskriminan untuk $D = 0$ adalah

$$D = 4n^2 - 8(n^2 - 4)$$

$$0 = -4n^2 + 32$$

$$n^2 = 8 \text{ maka } n = \sqrt{8} = \pm 2 \sqrt{2}$$

$$n = -2 \sqrt{2} \text{ atau } n = 2 \sqrt{2}$$

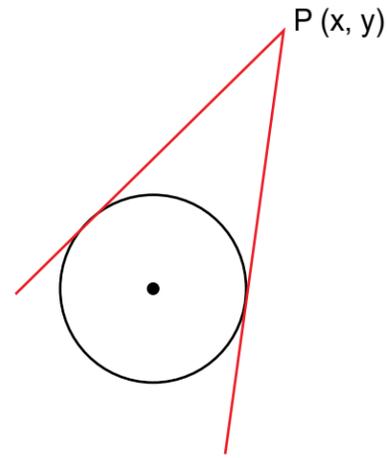
Jadi, persamaan garis singgung lingkaran adalah $y = -x - 2 \sqrt{2}$ dan $y = -x + 2 \sqrt{2}$



Persamaan Garis Singgung Lingkaran Melalui Titik (x,y) di Luar Lingkaran

Diketahui titik P(x, y) berada di luar lingkaran. Dari titik P ini selalu dapat dibuat dua buah garis singgung pada lingkaran.

Untuk menentukan persamaan garis singgung melalui titik (x,y) di luar lingkaran tidak ada rumus baku, tetapi dapat dilakukan dengan cara-cara pendekatan diskriminan persamaan kuadrat, menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradient tertentu atau menggunakan persamaan garis singgung melalui sebuah titik pada lingkaran.



Gambar 3.3. Garis singgung melalui Titik di luar lingkaran

Contoh soal 1 :

- Tentukanlah persamaan garis singgung pada lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik (7,-1).
- Tentukan koordinat-koordinat titik singgung.
- Tentukan persamaan garis yang menghubungkan titik-titik singgung.

Jawab :

- Menentukan persamaan garis singgung
Menggunakan diskriminan persamaan kuadrat :

Periksa titik (7,-1) apakah terletak pada atau di luar lingkaran

$$x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow 7^2 + (-1)^2 = 49 + 1 = 50 > 25$$

Persamaan garis singgung melalui titik (7,-1), dimisalkan :

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Leftrightarrow y - (-1) = m(x - 7)$$

$$\Leftrightarrow y + 1 = mx - 7m$$

$$\Leftrightarrow y = mx - 7m - 1 \dots\dots\dots \text{(persamaan 1)}$$

Persamaan (1) disubstitusikan ke dalam persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ diperoleh persamaan kuadrat :

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + (mx - 7m - 1)^2 = 25$$

$$x^2 + m^2x^2 - 14m^2x - 2mx + 49m^2 + 14m + 1 = 25$$

$$(1 + m^2)x^2 - (14m^2 + 2m)x + (49m^2 + 14m - 24) = 0$$

Nilai diskriminan, yaitu :

$$D = (14m^2 + 2m)^2 - 4(1 + m^2)(49m^2 + 14m - 24)$$

$$D = 196m^4 + 56m^3 + 4m^2 - 100m^2 - 56m + 96 - 196m^4 - 56m^3$$

$$D = -96m^2 - 56m + 96$$

Syarat garis menyinggung lingkaran adalah $D = 0$ sehingga :

$$D = b^2 - 4.a.c = 0 \Leftrightarrow (-2m^2 + 14m)^2 - 4(m^2 + 1)(m^2 - 14m + 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 56m^3 + 196m^2 - 4m^2 - 56m - 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow 96m^2 + 56m - 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12m^2 + 7m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3m + 4)(4m - 3) = 0$$

$$m = \frac{3}{-4} \text{ atau } m = \frac{4}{3}$$

Untuk $m = \frac{3}{-4}$, maka persamaan garis singgungnya adalah $4x + 3y - 25 = 0$

Untuk $m = \frac{4}{3}$, maka persamaan garis singgungnya adalah $3x - 4y + 25 = 0$

- Mencari koordinat titik singgung

Misalkan, titik A adalah titik singgung garis l: $4y - 3x + 25 = 0$ dengan lingkaran.

$$l: 4y - 3x + 25 = 0 \text{ atau } l: y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

Substitusi garis l ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ diperoleh :

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{75}{8}x + \frac{625}{16} = 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2 - \frac{75}{8}x + \frac{625}{16} = 25$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 150x + 225 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Substitusikan $x = 3$ pada persamaan garis singgung $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$

Apakah Anda memperoleh titik singgung A (3, -4)?

Misalkan, titik B adalah titik singgung garis $g: 3y + 4x - 25 = 0$ dengan lingkaran

$g: 3y + 4x - 25 = 0$ atau $g: y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$

Substitusi garis g ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ diperoleh :

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{200}{9}x + \frac{625}{9} = 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9}x^2 - \frac{200}{9}x + \frac{625}{9} = 25$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 200x + 400 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Coba Anda substitusikan $x = 4$ pada persamaan garis singgung :

Apakah Anda memperoleh titik singgung B(4, 3)?

Jadi, koordinat titik singgung adalah A(-3, 4) dan B(4, 3).

- c. Persamaan garis yang melalui titik A(-3, 4) dan B(4, 3) diperoleh dengan menggunakan rumus persamaan garis :

$$7y - 28 = -x - 3$$

$$x + 7y = 25$$

Persamaan garis yang menghubungkan titik singgung A dan B adalah $x + 7y = 25$.

Contoh soal 2 :

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik (9, 0) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 36$

Jawab :

Misalkan, persamaan garis singgung

$$y - 0 = m(x - 9)$$

$$y = mx - 9m \text{ maka ; } x^2 + (mx - 9)^2 = 36$$

$$x^2 + m^2x^2 - 18mx + 81 = 36$$

$$(1 + m^2)x^2 - 18mx + 45 = 0$$

$$\text{syarat menyinggung: } (18m)^2 - 4(1 + m^2)(45) = 0$$

$$324m^2 - 180m^2 - 180 = 0$$

$$144m^2 = 180 \Leftrightarrow m^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x-9) \Leftrightarrow \sqrt{5}x - 2y = 9\sqrt{5}$$

PENUGASAN

Pada unit 3. "Kemasan Martabak Manis", meliputi beberapa kajian materi meliputi :

Tujuan

Pada pembelajaran ini memiliki tujuan penugasan agar peserta didik dapat :

1. Menyusun persamaan lingkaran yang melalui suatu titik pada lingkaran
2. Menentukan persamaan lingkaran dengan gradien tertentu
3. Menentukan persamaan lingkaran yang melalui suatu titik di luar lingkaran

Media, Alat, Bahan, dan Sumber Belajar Lainnya

Alat dan Bahan yang digunakan: alat tulis, penggaris dan spidol.

Langkah-langkah Kegiatan

- a. Kegiatan 1.1. Menyusun persamaan Lingkaran melalui suatu titik pada lingkaran
Untuk dapat menyusun persamaan lingkaran yang melalui suatu titik pada lingkaran pelajari dan kaji permasalahan berikut ini.

Masalah 1.1.

Menyusun Persamaan Lingkaran suatu Benda

Amatilah 3 benda yang berbentuk lingkaran di sekitar kalian, ukurlah jari-jarinya dan kemudian susunlah persamaannya!

Alternatif Jawaban

Langkah Mengerjakan

Untuk dapat mengerjakan penugasan tersebut, peserta didik harus :

1. Mencari dan menyebutkan 3 benda yang berbentuk lingkaran.

2. Mengukur panjang jari-jari masing-masing benda
 3. Menyusun persamaan lingkaran masing-masing benda tersebut.
- b. Kegiatan 1.2. Menentukan persamaan lingkaran, menentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran yang diketahui persamaannya
Untuk dapat menentukan persamaan lingkaran, menentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran yang diketahui persamaannya pelajari dan kaji permasalahan berikut ini!

Masalah 1.2.

Menentukan persamaan lingkaran, menentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran yang diketahui persamaannya

Kerjakan soal berikut dengan baik dan benar!

1. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dari persamaan lingkaran berikut. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
2. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat (3, 4) dan melalui titik (5, 5).
3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (1, 2) dan berjari-jari 5.
4. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik (-2, 0), (6, 0), dan (5, 7) dan tentukan pula pusat dan jari-jari lingkarannya.

Alternatif Jawaban

Langkah mengerjakan

Untuk dapat mengerjakan penugasan tersebut, peserta didik harus :

1. Membaca, mencermati dan memahami uraian materi dan rumus-rumus persamaan lingkaran.
2. Pilih rumus yang tepat untuk menjawab apa yang ditanyakan
3. Mulai mengerjakan sesuai dengan langkah-langkah yang tepat.

LATIHAN

Berilah tanda silang (X) pada salah satu huruf a, b, c, d atau e pada jawaban yang benar!

1. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ melalui titik (5, 1) adalah ...
 - a. $3x + 4y - 19 = 0$
 - b. $3x - 4y - 19 = 0$

- c. $4x - 3y + 19 = 0$
- d. $x + 7y - 26 = 0$
- e. $x - 7y - 26 = 0$

2. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$ di titik yang berabsisi -1 adalah
 - a. $3x - 2y - 3 = 0$
 - b. $3x - 2y - 5 = 0$
 - c. $3x + 2y - 9 = 0$
 - d. $3x + 2y + 9 = 0$
 - e. $3x + 2y + 5 = 0$
3. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$ di titik yang berabsisi 5 adalah
 - a. $4x - y - 18 = 0$
 - b. $4x - y + 4 = 0$
 - c. $4x - y + 10 = 0$
 - d. $4x + y - 4 = 0$
 - e. $4x + y - 15 = 0$
4. Salah satu persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 8y - 8 = 0$ yang tegak lurus garis $x - 3y + 5 = 0$ adalah
 - a. $y = -3x - 9 + 7$
 - b. $y = -3x - 11 + 7$
 - c. $y = -3x - 19 + 7$
 - d. $3y = -3x - 9 + 7$
 - e. $3y = x + 17 + 7$
5. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 10 = 0$ yang tegak lurus garis terhadap garis $x + 2y + 1 = 0$ adalah
 - a. $y = 2x - 14$
 - b. $y = 2x - 11$
 - c. $y = 2x + 5$
 - d. $y = 2x + 9$
 - e. $y = 2x + 15$
6. Persamaan garis singgung lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 80$ yang sejajar dengan garis $y - 2x + 5 = 0$ adalah
 - a. $y = 2x - 11 \pm 20$
 - b. $y = 2x - 8 \pm 20$
 - c. $y = 2x - 6 \pm 15$

- d. $y = 2x - 8 \pm 15$
- e. $y = 2x - 6 \pm 25$

7. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ dengan gradien - 1 adalah
- a. $-x + 2$
 - b. $-x - 1$
 - c. $x + 2$
 - d. $-x - 3$
 - e. $x - 2$
8. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di titik (3, -4) adalah ...
- a. $3x - 4y - 25$
 - b. $3x - 4y - 15$
 - c. $-3x - 4y - 25$
 - d. $-3x + 4y = 25$
 - e. $3x + 4y + 15$
9. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$ di titik yang berabsisi -1 adalah
- a. $3x - 2y - 3 = 0$
 - b. $3x - 2y - 5 = 0$
 - c. $3x + 2y - 9 = 0$
 - d. $3x + 2y + 9 = 0$
 - e. $3x + 2y + 5 = 0$
10. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 13 = 0$ melalui titik (-2, -1) adalah
- a. $-2x - y - 5 = 0$
 - b. $x - y + 1 = 0$
 - c. $x + 2y + 4 = 0$
 - d. $3x - 2y + 4 = 0$
 - e. $2x - y + 3 = 0$

Rangkuman

1. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap suatu titik tertentu selalu sama (titik tertentu tersebut disebut titik pusat lingkaran dan jarak yang sama dinamakan jari-jari).
2. Beberapa bagian lingkaran yang menjadi unsur-unsur sebuah lingkaran, yaitu titik pusat, jari-jari, busur, diameter, tali busur, juring, tembereng apotema, sudut pusat dan sudut lingkaran
3. Persamaan lingkaran dengan pusat O (0, 0) dan berjari-jari r adalah :
 $r^2 = x^2 + y^2$ atau $x^2 + y^2 = r^2$
4. Rumus persamaan garis singgung :
 - 1) Persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 = r^2$
Persamaan garis singgung : $x_1x + y_1y = r^2$
 - 2) Persamaan lingkaran : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
Persamaan garis singgung : $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$
 - 3) Persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
Persamaan garis singgung : $x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x_1 + x) + \frac{1}{2}B(y_1 + y) + C = 0$

UJI KOMPETENSI

Berilah tanda silang (X) pada salah satu huruf a, b, c, d atau e pada jawaban yang benar!

- Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$ di titik yang berabsisi -1 adalah
 - $3x - 2y - 3 = 0$
 - $3x - 2y - 5 = 0$
 - $3x + 2y - 9 = 0$
 - $3x + 2y + 9 = 0$
 - $3x + 2y + 5 = 0$
- Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$ di titik yang berabsisi 5 adalah
 - $4x - y - 18 = 0$
 - $4x - y + 4 = 0$
 - $4x - y + 10 = 0$
 - $4x + y - 4 = 0$
 - $4x + y - 15 = 0$
- Salah satu persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 8y - 8 = 0$ yang tegak lurus garis $x - 3y + 5 = 0$ adalah
 - $y = -3x - 9 + 7$
 - $y = -3x - 11 + 7$
 - $y = -3x - 19 + 7$
 - $3y = -3x - 9 + 7$
 - $3y = x + 17 + 7$
- Persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(-1, 2)$ dan menyinggung garis $x + y + 7 = 0$ adalah
 - $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 27 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 27 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 32 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 32 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$
- Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 10 = 0$ yang tegak lurus garis terhadap garis $x + 2y + 1 = 0$ adalah
 - $y = 2x - 14$
 - $y = 2x - 11$
 - $y = 2x + 5$
 - $y = 2x + 9$
 - $y = 2x + 15$
- Persamaan garis singgung melalui titik $(-2, -1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 13 = 0$ adalah
 - $-2x - y - 5 = 0$
 - $x - y + 1 = 0$
 - $x + 2y + 4 = 0$
 - $3x - 2y + 4 = 0$
 - $2x - y + 3 = 0$
- Persamaan lingkaran yang padatnya terletak pada garis $2x - 4y - 4 = 0$ serta menyinggung sumbu x negatif dan sumbu y negatif adalah
 - $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$
- Lingkaran $L = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ memotong garis $y = 3$. Garis singgung lingkaran yang melalui titik potong antara lingkaran dan garis tersebut adalah
 - $x = 2$ dan $x = -4$
 - $x = 2$ dan $x = -2$
 - $x = -2$ dan $x = 4$
 - $x = -2$ dan $x = -4$
 - $x = 8$ dan $x = -10$
- Persamaan lingkaran yang melalui titik $(5, -1)$ dan berpusat di titik $(2, 3)$ adalah
 - $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 13 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 24 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 10 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25 = 0$
- Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ yang tegak lurus garis $3x - 4y - 5 = 0$ adalah
 - $4x + 3y - 5 = 0$
 - $4x - 3y - 17 = 0$
 - $4x + 3y - 17 = 0$
 - $4x - 3y - 13 = 0$
 - $4x + 3y - 13 = 0$

Kunci Jawaban

UNIT 1 : Potongan Martabak Manis

Latihan

1. (D) Juring
2. (A) 35
3. (B) 70
4. (A) 60 buah
5. (A) 352
6. (D) 28
7. (A) 110
8. (A) 9
9. (A) 20
10. (B) 44 cm

UNIT 2 : Ukuran Martabak Manis

Latihan

1. (A) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
2. (E) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$
3. (C) 2
4. (B) (2, -3)
5. (C) $x^2 + y^2 - 8 = 0$
6. (C) 5
7. (A) $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$
8. (B) 3
9. (D) $4x + 3y - 31 = 0$
10. (E) (3, -5)

Unit 3 :

Latihan :

1. (A) $3x + 4y - 19 = 0$
2. (D) $3x + 2y + 9 = 0$
3. (A) $4x - y - 18 = 0$
4. (B) $y = -3x - 11 + 7$
5. (E) $y = 2x + 15$
6. (A) $y = 2x - 11 \pm 20$
7. (A) $-x + 2$
8. (A) $3x - 4y - 25$
9. (D) $3x + 2y + 9 = 0$
10. (B) $x - y + 1 = 0$

KRITERIA PINDAH MODUL

Setelah seluruh materi dan setiap kompetensi dasar dipelajari dengan seksama maka cobalah untuk mengerjakan latihan soal yang disediakan, baik secara individu, kelompok maupun dengan bimbingan tutor. Semakin rajin peserta didik dalam mengerjakan soal penugasan, diharapkan semakin terampil dan cepat mengeneralisasikan setiap permasalahan baik yang disediakan dalam modul ataupun dalam kaitannya dengan permasalahan sehari-hari.

Pada tahap berikutnya, kerjakan soal-soal dalam latihan, untuk mengukur penguasaan materi yang diperoleh dengan menggunakan rumus di bawah ini.

$$\text{Skor penilaian} = \frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{\text{Jumlah soal}} \times 100\%$$

Keterangan :

Skor Penilaian	Tingkat Penguasaan
90 - 100%	Baik sekali
80 - 89%	Baik
70 - 79%	Cukup
60 - 69%	Kurang

Jika peserta didik mampu mencapai skor penilaian 80% atau lebih (tingkat penguasaan “baik” atau “sangat baik) maka dapat melanjutkan ke Standar Kompetensi berikutnya, tetapi jika penilaian kurang dari 80% dianjurkan untuk mengulang kembali Standar Kompetensi tersebut, terutama pada bagian yang belum dikuasai. Tanyakan dengan teman atau dengan bimbingan tutor.



Saran Referensi

Untuk menambah wawasan dalam pemahaman terkait modul 2 yang meliputi materi vektor pada bidang dan vektor dalam ruang, maka diharapkan peserta didik mencari sumber atau referensi lain selain modul ini. Saran referensi tersebut antara lain:

1. Judul Buku: “Ensiklopedia Matematika Terapan”, Karya Sue Thomshon dan Ian Fortster, dengan judul tema terjemahan:
 - a. Matematika dalam Masyarakat
 - b. Matematika dalam Olahraga
 - c. Matematika dalam Lingkungan
 - d. Matematika dalam Tempat Kerja
 - e. Matematika dalam Makanan
 - f. Matematika dalam Rancang Bangun
 - g. Matematika dalam Televisi
 - h. Matematika dalam Sains
 - i. Matematika dalam Teknologi
 - j. Matematika dalam Perjalanan
 - k. Matematika dalam Rumah
 - l. Matematika dalam Tubuh
2. Judul Buku: “Tingkatkan Kemampuan Otak Anda (Improve Your Brain Power)”, Karya Jackie Guthrie dan Tim Preston
3. Judul Buku: “Referensi Matematika dalam Kehidupan Manusia”, Karya Dr. Wahyudin dan Drs. Sudrajat, M.Pd.
4. Judul Buku: “Panduan Belajar Matematika SMA.”, Karya Sumanto
5. Sumber media internet (melalui browsing: anistuing.blogspot.co.id, fedraadi.wordpress.com, dan lain-lain)



Daftar Pustaka

Haryati Sri. 2007. Matematika Pendekatan Tematik dan Induktif Tingkat V Derajat Mahir 1 untuk Paket C Setara Kelas X SMA/MA". Jakarta : PT. Perca.

Juniati E.. Haryati Sri. 2007. Matematika Pendekatan Tematik dan Induktif, Program Kesetaraan Paket C Kelas XI Program IPS dan Bahasa". Jakarta : PT. Perca.

Noormandiri, B.K., 2016. Matematika untuk SMA/MA kelas X Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam". Jakarta : Erlangga.

Sembiring S., Nagiah, Mulyaningsih S., 2014. Matematika untuk SMA/MA Kelas X Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam" Bandung : PT. Sewu.

Wirodikromo, S..2002. Matematika untuk SMA Kelas X. Jakarta : Erlangga.

Yuana R.A., Indriyastuti. 2016. Buku Siswa, Perspektif Matematika 1 untuk kelas X SMA dan MA Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam". Solo : PT. Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.